

Probabilidades Y Estadística II

TEMA 2. MODELOS DE COLAS

Tema 2. Modelos de Colas Poissonianos

Probabilidades y Estadística II

CONTENIDOS

1. Introducción a las colas poissonianas.
2. Modelo de colas poissoniano con un servidor $M/M/1$
3. Modelo con un servidor y capacidad finita $M/M/1/K$
4. Modelo con varios servidores $M/M/c$. Fórmula C de Erlang
5. Modelo con infinitos servidores $M/M/\infty$
6. Modelo con un servidor, población finita $M/M/1/K/K$

2.7 Modelo $M/M/1/K/K$: población finita

Ahora consideraremos una **población finita** de tamaño K clientes. Cada uno de ellos estará en el sistema (encolado o sirviéndose), o estará en la población hasta que precise acudir al sistema.

Este modelo es uno de los más útiles de la Teoría de Colas y se conoce también como **modelo de reparación de máquinas** o **modelo de interferencia de máquinas**.

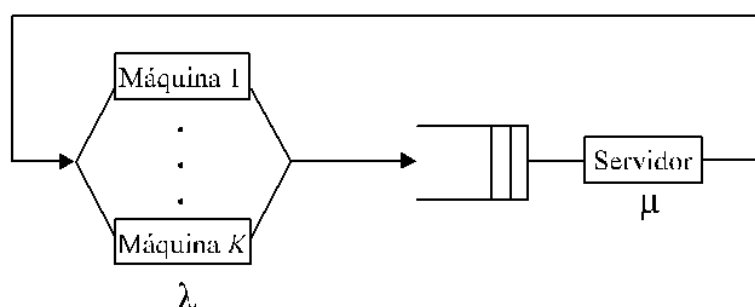
Nótese que este modelo **es también un $M/M/1/K$** , pues recordemos que dejar en blanco el símbolo de la capacidad del sistema significa que ésta es infinita y en el caso que nos ocupa es obvio que nunca habrá más de K clientes en el sistema.

Supondremos que los K clientes son idénticos e independientes. Tenemos una **nueva v.a.** $O =$ "tiempo desde que el cliente sale del servicio para regresar a la población, hasta que precisa de un nuevo servicio", que supondremos **exponencial** de media $1/\lambda$ unidades de tiempo.

O suele denominarse **tiempo de operación** o **tiempo entre roturas**, ya que es el tiempo en que el cliente, piénsese por ejemplo en máquinas, permanece operativo entre roturas consecutivas. Visto de otra forma, es el **tiempo que un cliente pasa fuera del sistema**.

Por otra parte, el comportamiento del **servidor** es el usual, con duración del servicio o reparación dada por $s \sim \text{Exp}(\mu)$.

Así, cuando K máquinas comparten un servicio de reparación, λ es la tasa media de fallos de cada máquina y μ es la tasa media de reparación. La siguiente figura muestra esta situación:



Solución de equilibrio

El número de clientes en el sistema va a afectar a la **tasa de llegadas**.

Si hay n clientes en el sistema (máquinas no funcionando), hay $K - n$ en la población (funcionando), y el tiempo hasta que el próximo cliente llegue al sistema (vuelva a necesitar una reparación) es el mínimo de $K - n$ v.a.i.d. según $\text{Exp}(\lambda)$, es decir, es una $\text{Exp}(\lambda(K - n))$.

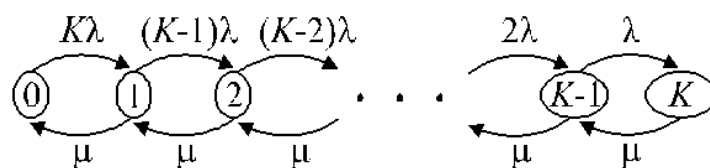
Por tanto, el sistema es **autorregulador**, pues según crece el número de clientes en el sistema se reduce la tasa de llegadas.

En resumen, las tasas son

$$\lambda_n = \begin{cases} (K - n)\lambda, & \text{si } n = 0, 1, \dots, K - 1 \\ 0, & \text{si } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } n = 1, 2, \dots, K \\ 0, & \text{si } n > K \end{cases}$$

El **diagrama de transición** es



De ahí, las **ecuaciones de equilibrio** son

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	=	$K\lambda\pi_0$
$1 \leq n \leq K - 1$	$(K - n + 1)\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$	=	$[(K - n)\lambda + \mu]\pi_n$
K	$\lambda\pi_{K-1}$	=	$\mu\pi_K$

El sistema es **ergódico**, es decir, siempre alcanza el estado de equilibrio, pues no puede haber más de K clientes en él. La solución es

$$\pi_n = \frac{K!}{(K - n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \pi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K$$

Como $\sum_{n=0}^K \pi_n = 1$,

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^K \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1},$$

Sea $z = \mu/\lambda$. Si multiplicamos y dividimos por $z^K/K!$ en la expresión de π_0

$$\pi_0 = \frac{z^K/K!}{\sum_{n=0}^K \frac{z^{K-n}}{(K-n)!}} = \frac{z^K/K!}{\sum_{n=0}^K \frac{z^n}{n!}} = B(K, z)$$

siendo $B(\cdot, \cdot)$ la [fórmula B de Erlang](#).

Medidas de rendimiento

A partir de π_0 , la [utilización real del servidor](#) resulta $\rho = 1 - \pi_0 = 1 - B(K, z)$.

La [tasa media efectiva de llegadas](#) al sistema λ_e es $\lambda_e = \lambda \rho = \lambda (1 - \pi_0) = \lambda - \lambda \pi_0$.

Otra forma de calcularlo es:

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \sum_{n=0}^K (K-n) \lambda \pi_n = \sum_{n=0}^K K \lambda \pi_n - \sum_{n=0}^K n \lambda \pi_n = \\ &= K \lambda \sum_{n=0}^K \pi_n - \lambda \sum_{n=0}^K n \pi_n = K \lambda - \lambda L = \lambda (K - L), \end{aligned}$$

que es un resultado esperado, pues hay $K - L$ clientes en media en la población.

Lo interesante es que deducimos de ahí la fórmula para L : $L = K - \frac{\lambda_e}{\lambda}$.

Aplicando las **fórmulas de Little** obtenemos:

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{K}{\lambda_e} - \frac{1}{\lambda}$$

$$W_q = W - W_s = \frac{K}{\lambda_e} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda_e W_q$$

Al ser también $W = L / \lambda_e = L / (\lambda(K-L))$, se tiene que el cociente del número medio de máquinas no funcionando, L , y funcionando, $K-L$, es $W\lambda = W/(1/\lambda)$, es decir, el tiempo medio no funcionando dividido por el tiempo medio funcionando.

$$\frac{W}{1/\lambda} = \frac{L}{K-L}$$

El **tiempo medio de espera en cola** para aquellos clientes que deben esperar:

$$E(q \mid q > 0) = \frac{W_q}{\rho} = \frac{\frac{K}{\lambda_e} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}{1 - B(K, z)}.$$

Pensando en clientes que son máquinas, puede interesar la **probabilidad de que una máquina dada esté estropeada**

$$P(\text{máquina } n \text{ esté estropeada}) = \frac{W}{W + E(O)}, \quad n = 1, 2, \dots, K,$$

ya que W es el tiempo medio que una máquina permanece fuera de servicio y $W+E(O)$ es el que emplea en el ciclo completo "no funcionando-funcionando", **que equivalentemente da lugar a L/K** .

Con esta idea, tenemos una tercera forma de calcular λ_e como

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{W + E(O)} &= \frac{L}{K} \Rightarrow \frac{K}{W + E(O)} = \frac{L}{W} \\ W &= \frac{L}{\lambda_e} \Rightarrow \lambda_e = \frac{L}{W} \end{aligned} \right\} \lambda_e = \frac{K}{W + E(O)} = \frac{K}{W_q + W_s + E(O)},$$

de donde, despejando W o W_q obtendríamos sus fórmulas anteriores.